Beberapa Distribusi Peluang Kontinu

Bahan Kuliah *II2092 Probabilitas dan Statistik*

Oleh: Rinaldi Munir

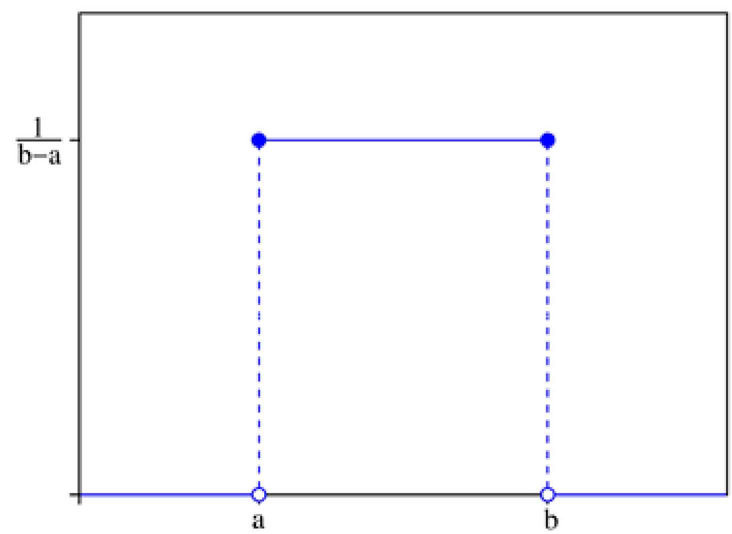
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB

Distribusi Seragam Kontinu

- Distribusi Seragam kontinu adalah distribusi peluang kontinu yang paling sederhana.
- Fungsi padat peluang dari peubah acak seragam kontinu *X* pada selang [a, b] adalah:

$$f(x,a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

- Kurva fungsi padat peluangnya ➔



- Contoh 1. Sebuah ruang konferensi dapat disewa untuk rapat yang lamanya tidak lebih dari 4 jam. Misalkan *X* adalah peubah acak yang menyatakan waktu rapat, yang mempunyai distribusi seragam.
  a) Tentukan fungsi densitas peluang dari *X*.
  b) Tentukan peluang suatu rapat berlangsung 3 jam atau lebih.

Jawaban:

a) a = 0, b = 4, sehingga $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$

b) P(X ≥ 3) = $\int_3^4 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} x \Big|_{x=3}^{x=4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

- Rataan dan variansi dari distribusi seragam kontinu adalah:

$$\mu = \frac{(a+b)}{2} \quad \text{dan} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

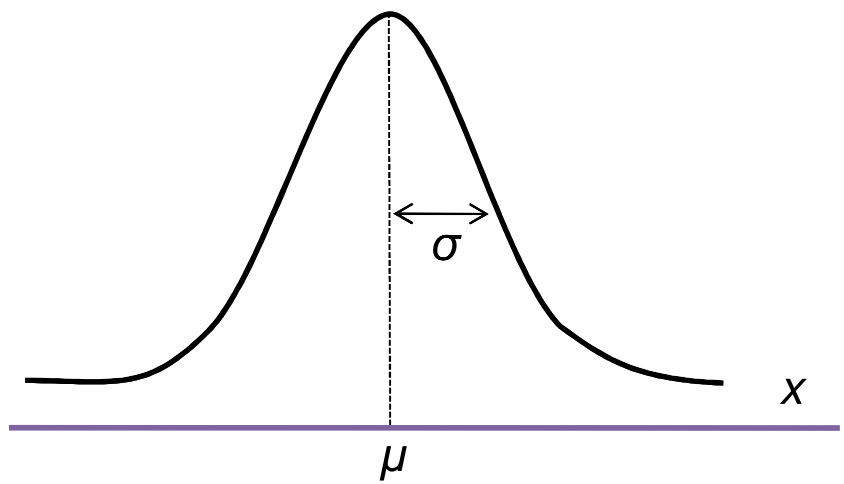
- Fungsi kumulatif:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{for } a \le x < b \\ 1 & \text{for } x \ge b \end{cases}$$

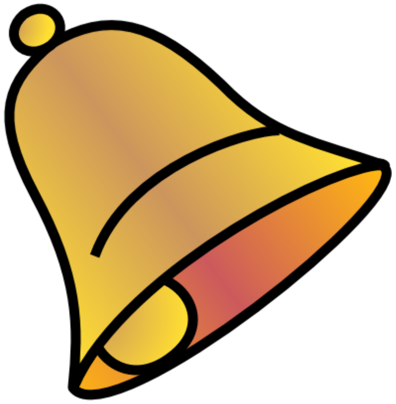
- Kasus khusus: jika a = 0 dan b = 1, maka distribusinya disebut **distribusi seragam baku** (*standard uniform distribution*), dilambangkan dengan U(0,1)

Distribusi Normal

- Distribusi normal adalah distribusi yang paling penting di antara distribusi yang lain. Kurva dari distribusi normal mempunyai bentuk setangkup seperti lonceng:

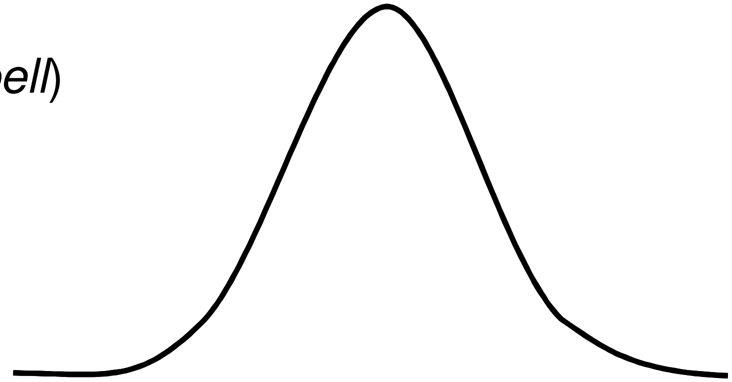


- Nama lainnya: distribusi Gauss (*Gaussian distribution*)
- Kurva distribusi normal disebut juga kurva normal atau kurva topi orang Meksiko (*mexican hat*)



Lonceng (*bell*)

Lonceng sekolah



Kurva normal

Sombrero, topi orang Meksiko

Sombrero, topi orang Meksiko

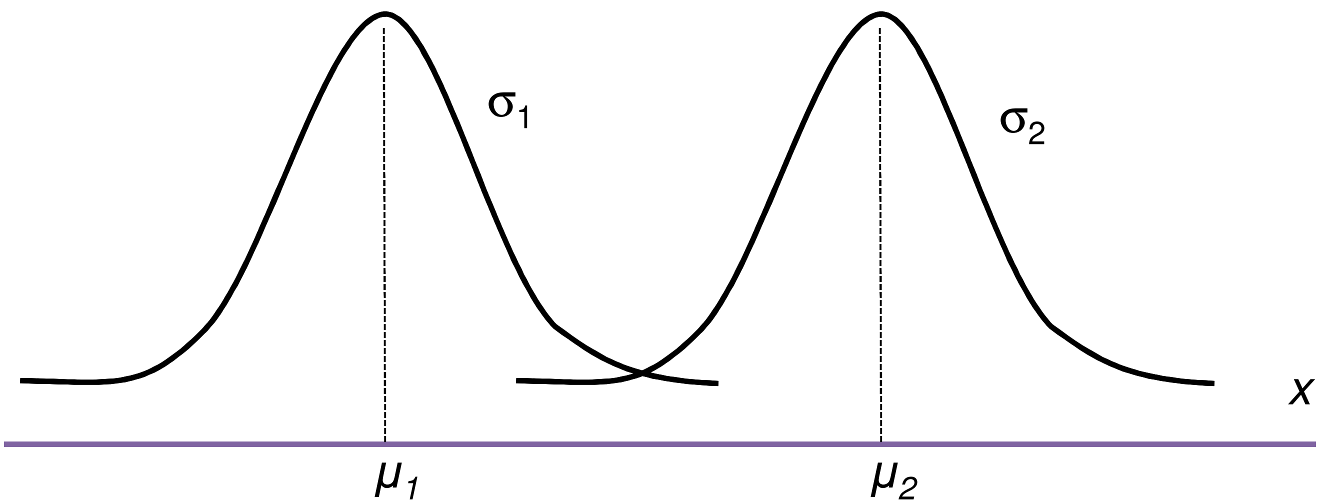
- Fungsi padat peluang (pdf) dari peubah acak normal *X*, dengan rataan μ dan variansi σ^2 adalah

$$n(x;\mu,\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2}, -\infty < x < \infty$$

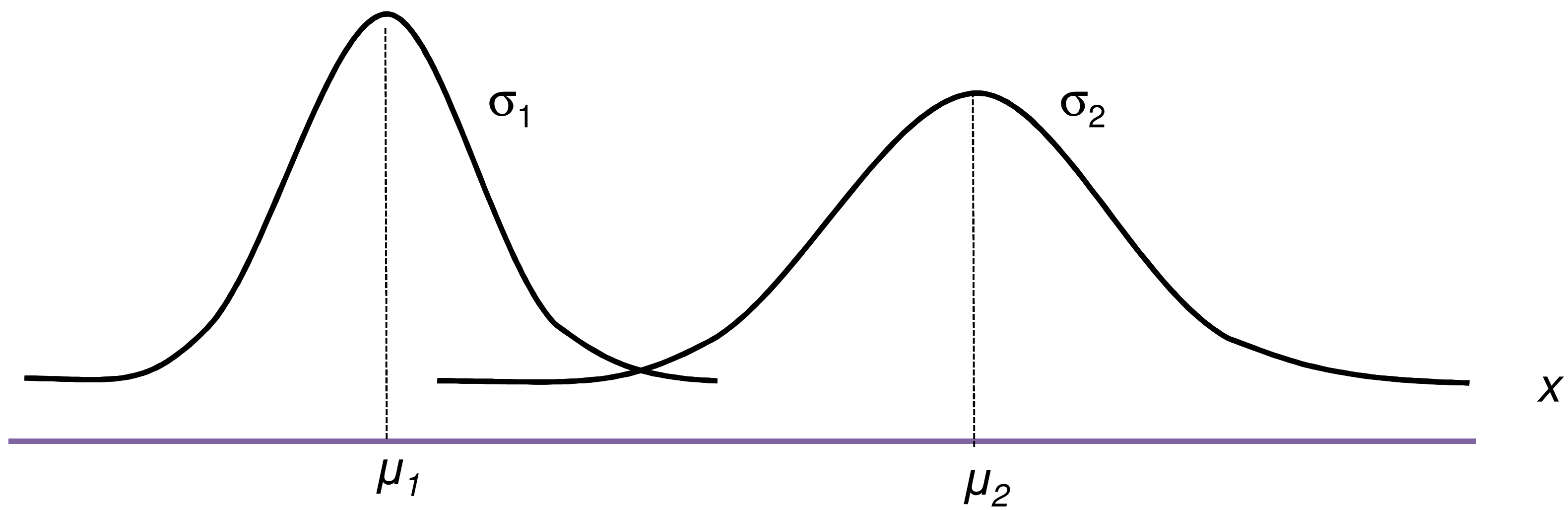
yang dalam hal ini π = 3.14159... dan e = 2.71828...

- Cukup dengan mengetahui μ dan σ, maka seluruh kurva normal diketahui.
- Misalnya bila $\mu = 30$ dan $\sigma = 8$, maka ordinat n(x; 30, 8) dapat dihitung untuk berbagai nilai x dan kurvanya dapat digambarkan.

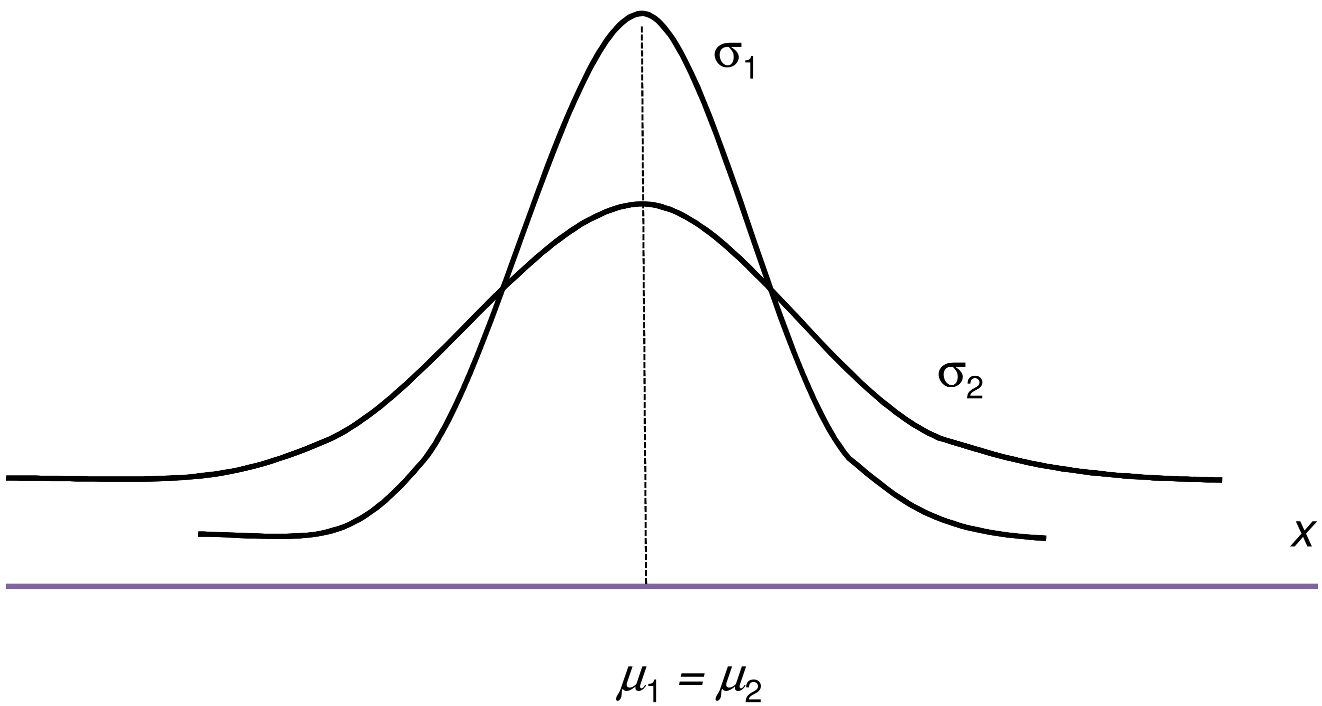
- Kurva normal dengan $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 = \sigma_2$:



- Kurva normal dengan $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$:



- Kurva normal dengan $\mu_1 = \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$:

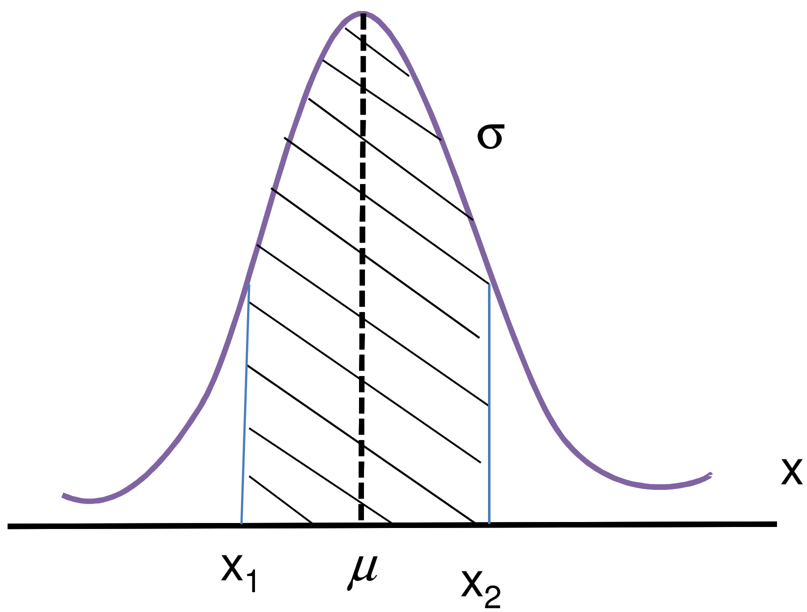


Sifat-Sifat Kurva Normal:

- Modus, adalah suatu titik yang terletak pada sumbu x di mana kurva mempunyai nilai maksimum, yaitu pada $x = \mu$
- Kurva berbentuk simetri terhadap sumbu tegak pada $x = \mu$
- Kurva mempunyai titik belok pada $x = \mu \pm \sigma$, cekung dari bawah bila $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ dan cekung dari atas untuk nilai x lainnya
- Kedua ujung kurva normal mendekati sumbu datar secara asimptotik bila x bergerak menjauhi μ baik dari kiri maupun dari kanan.
- Luas daerah di bawah kurva adalah 1

Luas Daerah di bawah Kurva Normal

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x;\mu,\sigma)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}\,dx$$



$P(x_1 < X < x_2)$

- Untuk mengatasi kesulitan dalam menghitung integral fungsi padat normal, maka dibuat tabel luas kurva normal.

- Tetapi, tidak mungkin membuat tabel berbeda untuk setiap nilai μ dan σ.

- Untunglah seluruh pengamatan setiap peubah acak normal X dapat ditransformasikan menjadi himpunan pengamatan baru peubah acak normal Z dengan rataan 0 dan variansi 1.

Definisi. Distribusi peubah acak normal dengan rataan 0 dan variansi 1 disebut dengan **distribusi normal baku** (*standard normal distributiion*).

- Cara transformasinya sebagai berikut:

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$$

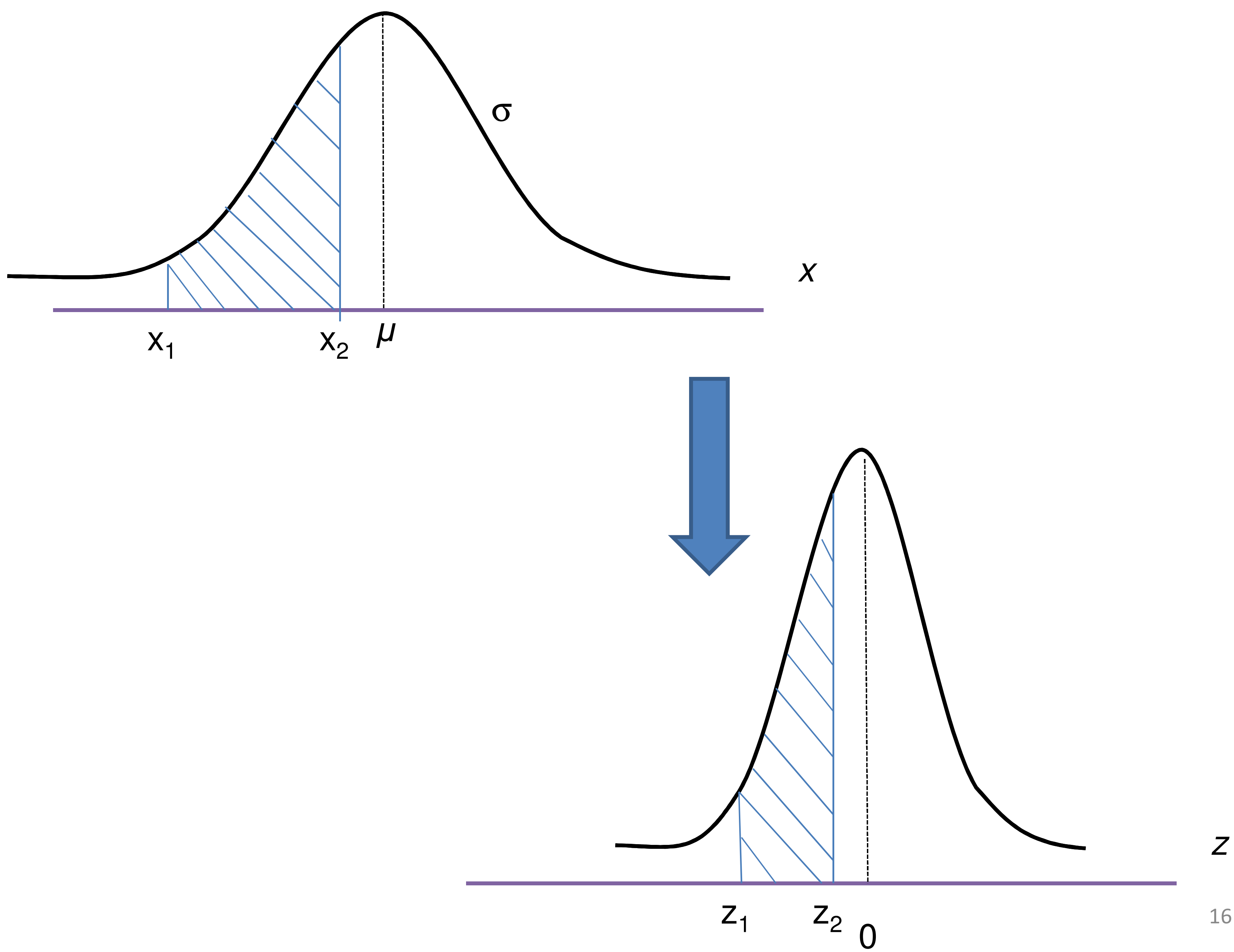
- Bila X bernilai antara x = x_1 dan x = x_2 maka peubah acak Z bernilai antara $z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$ dan $z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$

$$P(x_1 < X < x_2) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2} dx$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{z_1}^{z_2} e^{-\left(\frac{z^2}{2}\right)} dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{n}(z;0,1)dz$$

$$= P(z_1 < Z < z_2)$$

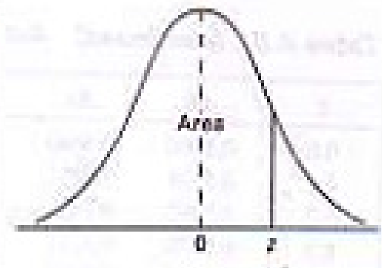

σ
x
x_1
x_2
μ
z
z_1
z_2
0

- Dengan transformasi tersebut, maka tabel luas kurva normal yang dibutuhkan cukup satu saja, yaitu distribusi normal baku.

- Sebagian tabel distribusi normal baku dapat dilihat pada halaman berikut ini.

Table A.3 Areas Under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641



- **Contoh 2**. Diberikan distribusi normal baku, hitunglah daerah di bawah kurva yang dibatasi:

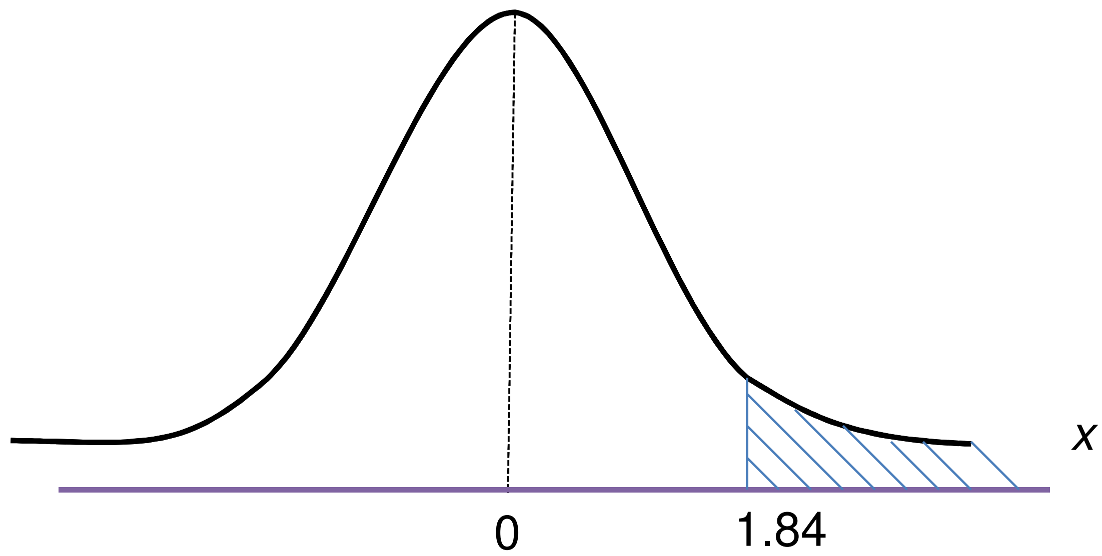
  (a) sebelah kanan $z = 1.84$

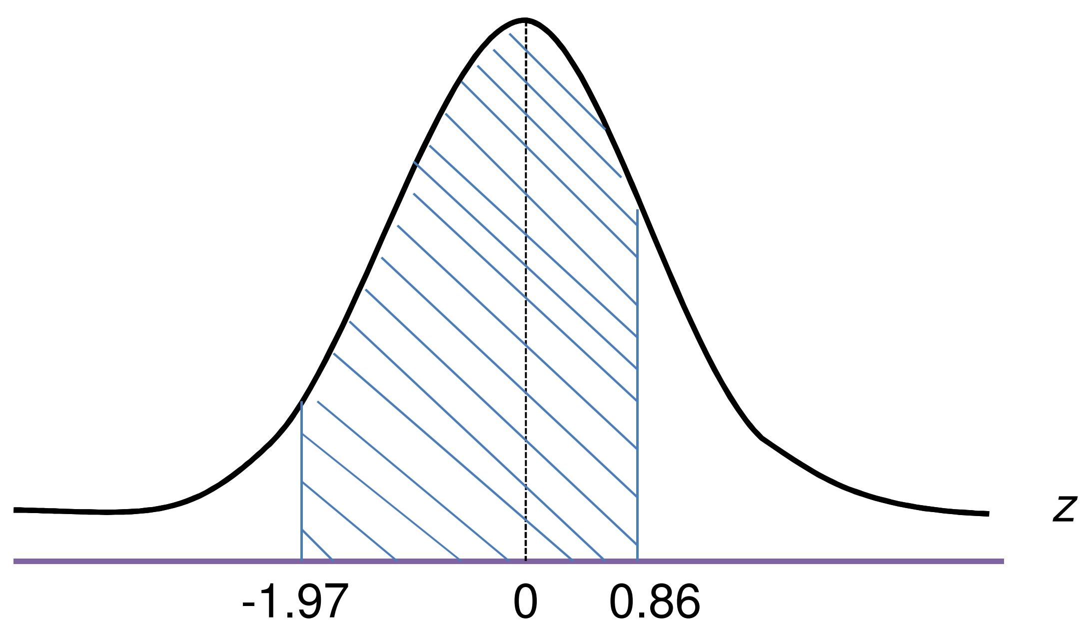
  (b) antara $z = -1.97$ dan $z = 0.86$

Jawaban:

(a) Luas sebelah kanan = 1 – luas sebelah kiri $z = 1.84$ (lihat gambar di halaman berikut ini). Dari tabel luas sebelah kiri = 0.9671, jadi Luas sebelah kanan = 1 – 0.9671 = 0.0329

(b) Luas daerah antar batas tersebut adalah luas di sebelah kiri z = 0.86 dikurangi dengan luas di sebelah kiri z = -1.97. Dari tabel diperoleh 0.8051 - 0.0244 = 0.7807


x
0
1.84


z
-1.97
0
0.86

- **Contoh 3**. Diberikan distribusi normal dengan μ = 50 dan σ = 10, hitunglah peluang x terletak antara 45 dan 62.

Jawaban: (lihat gambar di halaman berikut ini)

Nilai z yang bersesuaian dengan x tersebut adalah:

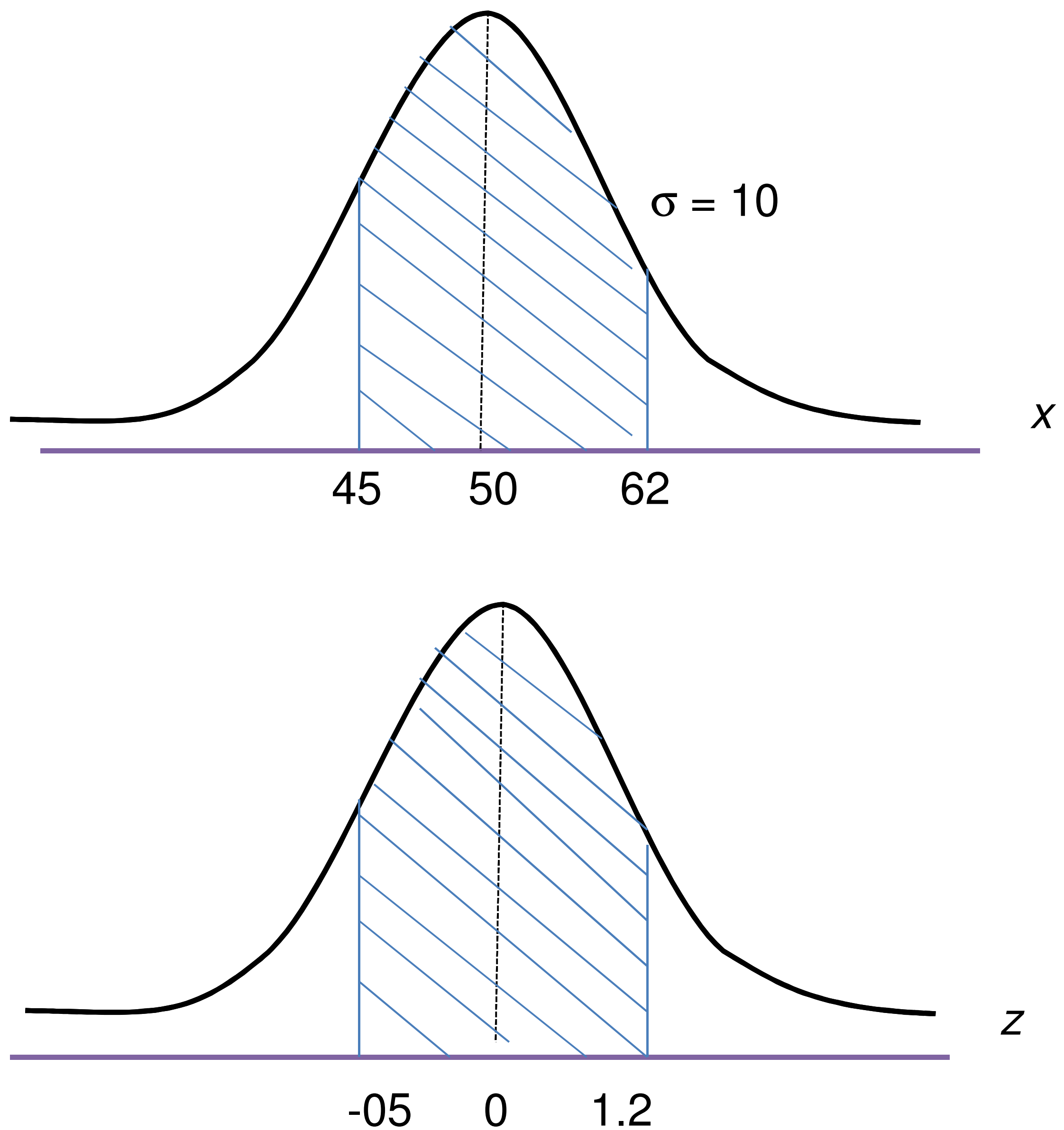
$$z_1 = \frac{(45 - 50)}{10} = -0.5 \text{ dan } z_2 = \frac{(62 - 50)}{10} = 1.2$$

sehingga

$$P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2)$$

$$= P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5)$$

$$= 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$$


σ = 10
x
45
50
62
z
-05
0
1.2

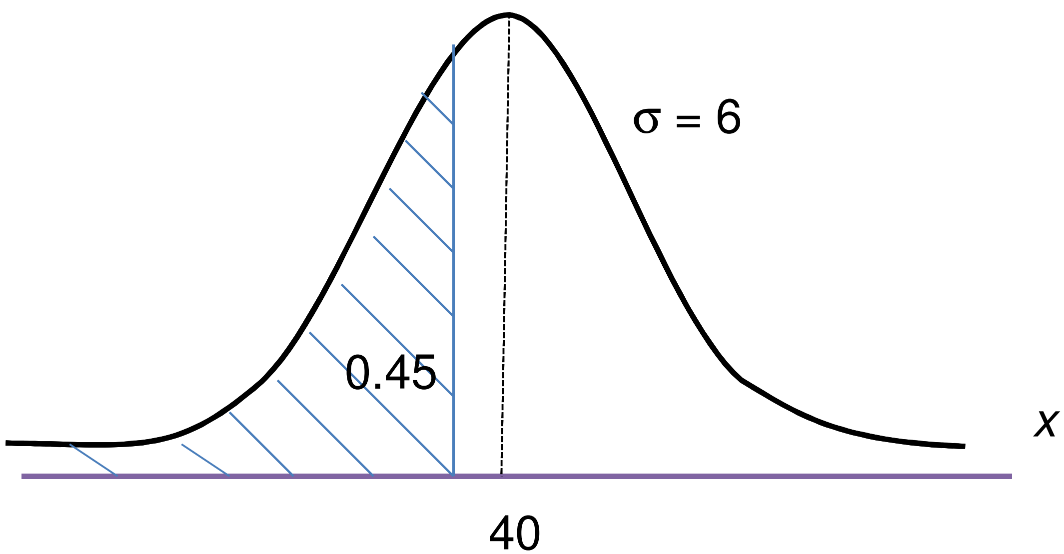
- **Contoh 4**. Diketahui suatu distribusi normal dengan μ = 40 dan σ = 6, carilah x sehingga:

  (a) luas di sebelah kirinya 45%

  (b) luas di sebelah kanannya 14%

Jawaban:

(a)



Diinginkan nilai x sehingga luas kirinya 0.45

Dari tabel normal baku diperoleh

$$P(Z < -0.13) = 0.45,$$

jadi nilai z yang dicari adalah -0.13. Oleh karena itu

$$x = (6)(-0.13) + 40 = 39.22$$

(b) Dengan cara yang sama, diinginkan luas di sebelah kanan nilai yang dicari adalah 0.14, ini berarti luas di sebelah kirinya adalah 1 – 0.14 = 0.86. Dari tabel normal baku diperoleh

$$P(Z > 1.08) = 0.86$$

jadi nilai z yang dicari adalah 1.08. Oleh karena itu

$$x = (6)(1.08) + 40 = 46.48$$

Contoh 5. Sebuah mesin pembuat resistor dapat memproduksi resistor dengan ukuran rata-rata 40 ohm dengan standard deviasi 2 ohm. Misalkan ukuran tersebut mempunyai distribusi normal, tentukan peluang resistor mempunyai ukuran lebih dari 43 ohm.

Jawaban: Lakukan transformasi terlebih dulu:

$$Z = \frac{(43-40)}{2} = 1.5$$

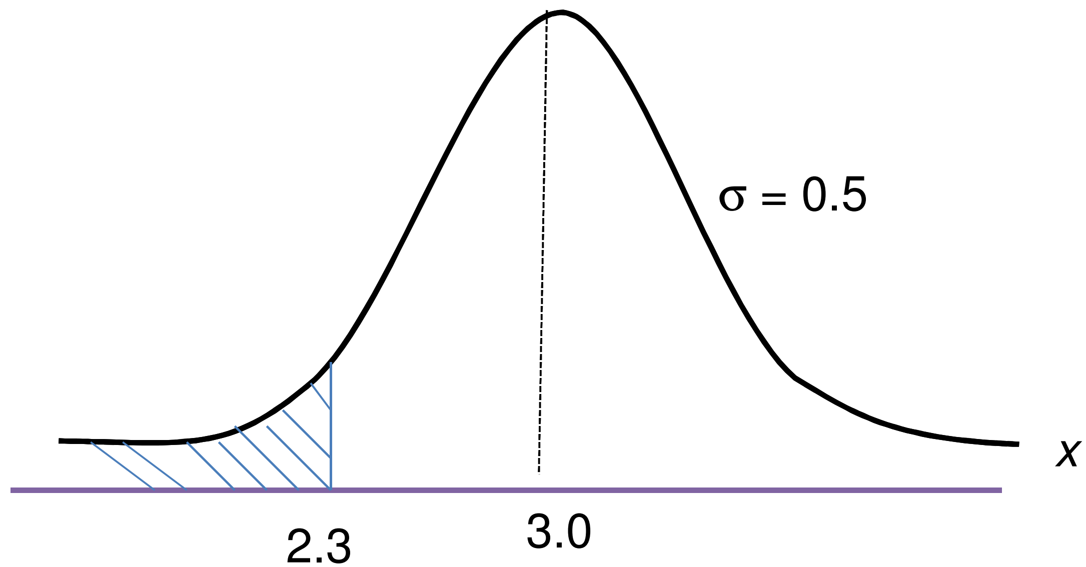
sehingga dapat dihitung:

$$P(X > 43) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$$
$$= 1 - 0.9332 = 0.0668$$

- **Latihan 1**. Suatu jenis batere mobil rata-rata berumur 3,0 tahun dengan simpangan baku 0.5 tahun. Bila dianggap umur bater berdistribusi normal, carilah peluang suatu batere berumur kurang dari 2.3 tahun.

  (jawaban sesudah lembar ini)

- Jawaban:



Untuk menghitung $P(X < 2.3)$, hitunglah luas di bawah kurva normal sebelah kiri titik 2.3. Ini sama saja menghitung luas daerah sebelah kiri z padanannya: $z = (2.3 – 3.0)/0.5 = -1.4$

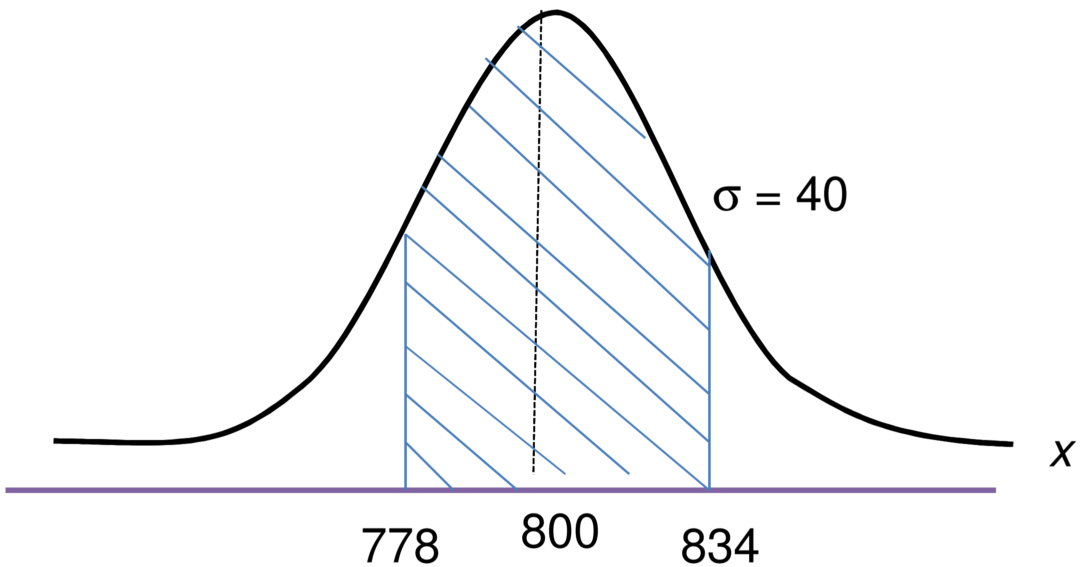
dan dari tabel normal baku diperoleh:

$$P(X < 2.3) = P(Z < -1.4) = 0.0808$$

- **Latihan 2**. Suatu perusahaan listrik menghasilkan bola lampu yang umurnya berdistribusi normal dengan rataan 800 jam dan simpangan baku 40 jam, Hitunglah peluang suatu bola lampu dapat menyala antara 778 dan 834 jam.

(jawaban sesudah lembar ini)

- Jawaban:



$$z_1 = (778 - 800)/40 = -0.55$$

$$z_2 = (834 - 800)/40 = 0.85$$

dan dari tabel normal baku diperoleh:

$$P(778 < X < 834) = P(-0.55 < Z < 0.85) =$$

$$= P(Z < 0.85) - P(Z < -0.55) =$$

$$= 0.8023 - 0.2912 = 0.5111$$

- **Latihan 3**. dari 200 orang mahasiswa yang mengikuti ujian Kalkulus di sebuah Prodi, diperoleh bahwa nilai rata-rata adalah 60 dan simpangan baku (standard devisasi) adalah 10. Bila distribusi nilai menyebar secara normal, berapa:

  (a) persen yang mendapat A, jika nilai $A \geq 80$;

  (b) persen yang mendapat nilai C, jika nilai C terletak pada interval $56 \leq C \leq 68$;

  (c) persen yang mendapat nilai E jika nilai $E < 45$

(jawaban pada halaman berikut)

- Jawaban: Misalkan X adalah peubah acak yang menyatakan nilai ujian Kalkulus.

$$Z = \frac{X - 60}{10}$$

(a) z = (80 – 60)/10 = 2

P(X $\geq$ 80) = P(Z $\geq$ 2) = 1 – 0.9772 = 0.0288 = 2.28%

(b) z_1 = (56 – 60)/10 = -0.4 dan z_2 = (68 – 60)/10 = 0.8

P(56 ≤ X ≤ 68) = P(-0.4 ≤ Z ≤ 0.8) = P(Z < 0.8) – P(Z < -0.4)

= 0.4435 = 44.35%

(c z = (45 – 60)/10 = -1.5

P(X ≤ 45) = P(Z ≤ -1.5) = 0.0688 = 6.68%

Aproksimasi Normal untuk Binomial

- Dalam bahan kuliah sebelumnya sudah dijelaskan bahwa distribusi Poisson dapat digunakan untuk menghampiri distribusi binomial ketika n membesar dan p sangat dekat ke 0 atau 1. Kedua distribusi tersebut adalah diskrit.

- Distribusi normal juga dapat digunakan untuk menghampiri distribusi binomial bilamana n cukup besar.

- Distribusi normal sering merupakan hampiran yang baik terhadap distribusi diskrit bila yang terakhir ini berbentuk lonceng setangkup.

Jika X adalah peubah acak binomial dengan rataan $\mu = np$ dan variansi $\sigma^2 = npq$, maka bentuk limit dari distribusi:

$$Z = \frac{(X - np)}{\sqrt{npq}}$$

bila $n \rightarrow \infty$ adalah distribusi normal standard $n(z; 0, 1)$

- Misalkan dari distribusi binomial diketahui n = 15 dan p = 0.4.

  Untuk menghitun P(X = 4), maka dengan tabel binomial mudah dihitung,

  $$P(X = 4) = b(4; 15, 0.4) = 0.1268$$

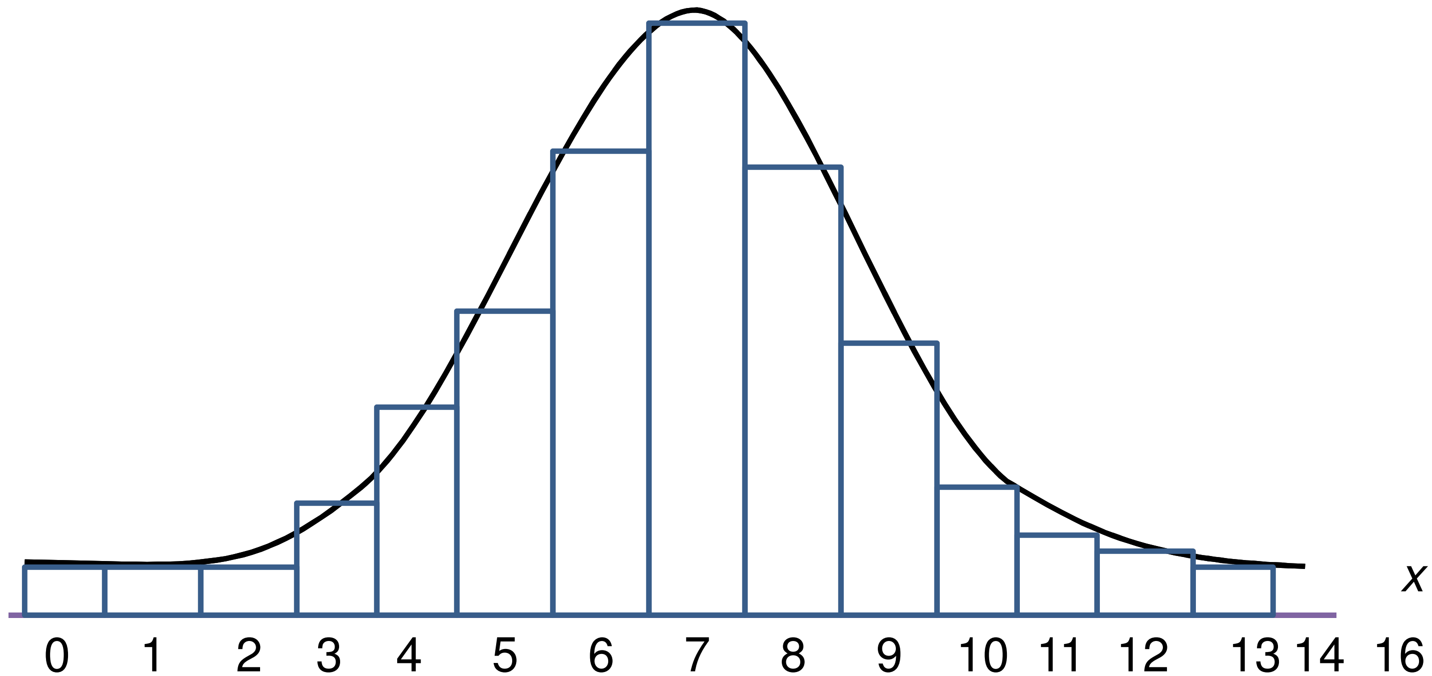
- Sekarang nilai peluang itu akan dihampiri dengan distribusi normal. Hitunglah

  $$\mu = np = (15)(0.4) = 6$$

  $$\sigma^2 = npq = (15)(0.4()).6) = 3.6 \rightarrow \sigma = \sqrt{3.6} = 1.897$$

Dari perhitungan binomial, telah diketahui P(X = 4) = 0.1268.

Nilai ini sama dengan luas daerah di bawah kurva normal antara $x_1 = 3.5$ dan $x_2 = 4.5$ (dimana x = 4 adalah titik tengah).


x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
16

Jika diubah ke nilai z, maka

$$z_1 = (3.5 - 6) / 1.897 = -1.32$$

$$z_2 = (4.5 - 6) / 1.897 = -0.79$$

Bila X peubah acak binomial dan Z peubah normal baku,

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= b(4; 15, 0.4) \\ &= P(-1.32 < Z < -0.79) \\ &= P(Z < -0.79) - P(Z < -1.32) \\ &= 0.2148 - 0.0934 \\ &= 0.1214 \end{aligned}$$

Hasil ini cukup dekat dengan nilai sesungguhnya yaitu 0.1268. Hampiran normal akan berguna untuk menghitung jumlah binomial untuk nilai n yang besar.

Contoh 6. Dalam soal ujian terdapat 200 pertanyaan *multiple choice*, setiap soal terdiri dar 4 jawaban dan hanya satu jawaban yang benar. Bila seorang siswa hanya menerka saja, berapakah peluang siawa menebak dengan benar sebanyak 25 sampai 30 dari 80 soal?

Jawaban:

Peluang jawaban yang benar untuk tiap soal adalah p = 1/4.

Jika X adalah peubah acak yang menyatakan banyaknya jawaban yang benar dengan menerka, maka

$$P(25 \leq X \leq 30) = \sum_{x=25}^{30} b(x;80,\frac{1}{4})$$

Dengan menggunakan hampiran kurva normal dengan

$$\mu = np = (80)(1/4) = 20$$

dan

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(80)(1/4)(3/4)} = 3.873$$

Diperlukan luas antara x_1 = 24.5 dan x_2 = 30.5. Nilai peubah z yang bersesuaian adalah:

$$z_1 = (24,5 - 20) / 3,873 = 1,16$$

dan

$$z_2 = (30,5 - 20) / 3,873 = 2,71$$

Sehingga dapat dihitung:

$$P(25 \leq X \leq 30) = \sum_{x=25}^{30} b(x;80,1/4)$$

$$\approx P(1.16 < Z < 2.71)$$

$$= P(X < 2.71) - P(X < 1.16)$$

$$= 0.9966 - 0.8770$$

$$= 0.1196$$

- **Latihan 4**. Peluang seorang penderita sembuh dari suatu penyakit adalah 0.4. Bila ada 100 orang yang terkena penyakit tersebut, berapa peluang bahwa kurang dari 30 orang yang sembuh?

  (jawaban sesudah lembar ini)

Jawaban: Misalkan X peubah binomial yang menyatakan banyaknya penderita yang sembuh. Karena n = 100, maka penggunaan hampiran kurva normal seharusnya memberikan hasil yang cukup tepat dengan

$$\mu = np = (100)(0.4) = 40$$

$$\sigma = \sqrt{(npq)} = \sqrt{\{(100)(0.4)(0.6)\}} = 4.899$$

Untuk mendapatkan peluang yang diminta, harus dicari luas di sebelah kiri x = 29.5. Nilai z yang berpadanan adalah

$$z = (29.5 – 40)/4.899 = -2.14$$

Jadi, peluang 30 orang sembuh dari 100 penderita adalah

$$P(X < 30) = P(Z < -2.14) = 0.0162$$

- **Latihan 5**. Di suatu daerah sebanyak 10% dari penduduknya buta huruf. Suatus ampel acak terdiri atas 400 penduduk telah diambil. Tentukan peluang akan mendapat:

  (a) paling banyak 30 orang buta huruf

  (b) antara 30 sampai 50 orang buta huruf

  (c) 55 orang atau lebih buta huruf

Distribusi Gamma

- Fungsi gamma adalah fungsi berbentuk:

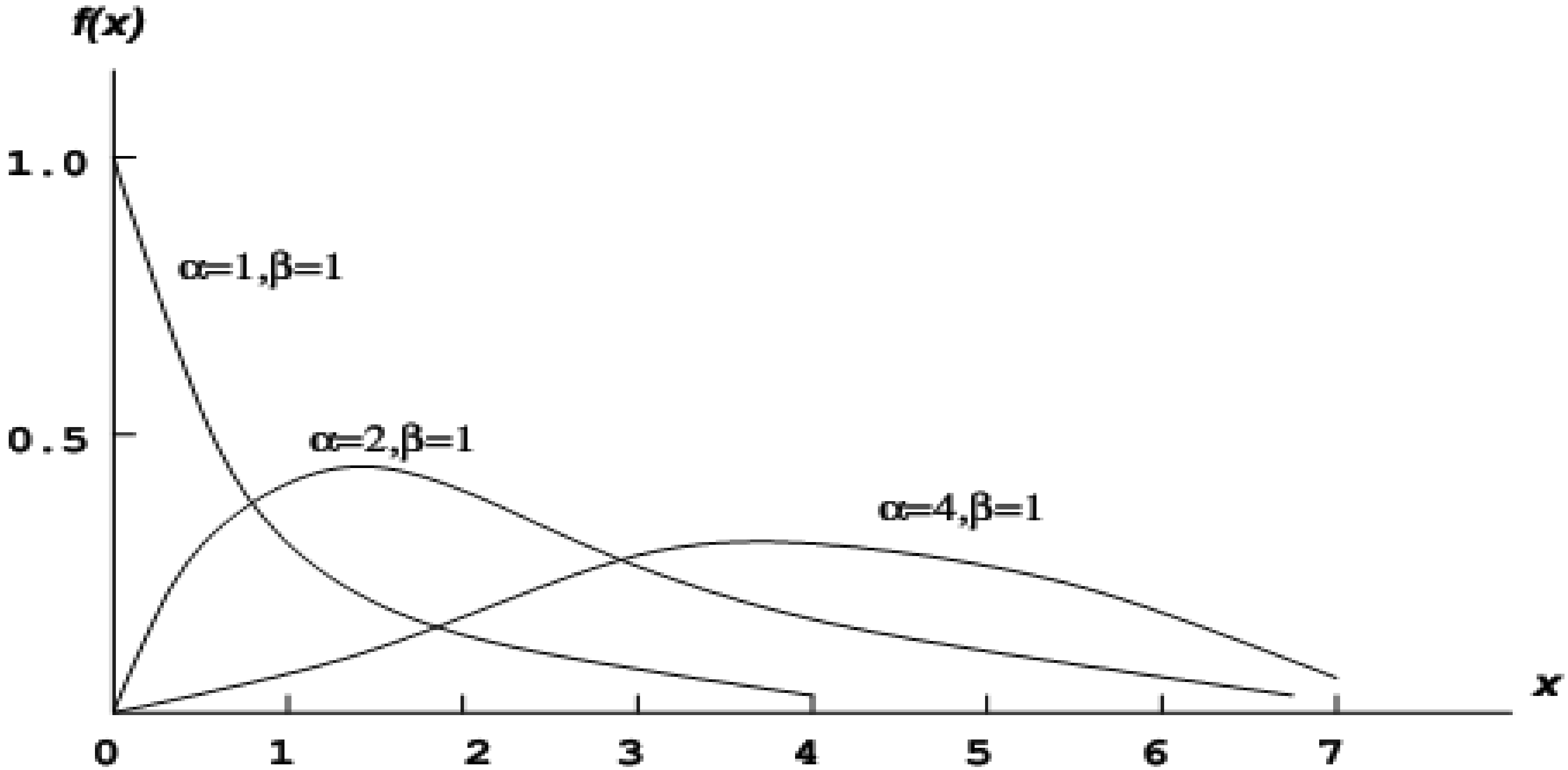
$$\Gamma(\propto) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad \text{untuk } \alpha > 0$$

- Peubah acak kontinu X mempunyai distribusi **gamma**, dengan parameter α dan β, jika fungsi padat peluangnya diberikan oleh:

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, x \geq 0 \\ \\ 0, \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$

- Grafik fungsi gamma:



Distribusi Eksponensial

- Distribusi gamma yang khusus dengan $\alpha = 1$ disebut distribusi eksponensial.

- Peubah acak kontinu *X* mempunyai distribusi **eksponensial** dengan parameter β, jika fungsi padat peluangnya berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, x \geq 0 \\ 0, \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan $\beta > 0$

- Rataan dan variansi dari distribusi gamma adalah

$$\mu = \alpha\beta \text{ dan } \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

- Akibatnya, rataan dan variansi distribusi eksponensial adalah:

$$\mu = \beta \text{ dan } \sigma^2 = \beta^2$$

Aplikasi distribusi eksponensial:

1. Dalam teori antrian, jarak antar kedatangan pelanggan di fasilitas pelayanan (seperti bank, loket kereta api, tukang cukur, dsb) memenuhi distribusi eksponensial.

2. Lama waktu mulai dipakai sampai rusaknya suatu suku cadang dan alat listrik memenuhi distribusi eksponensial.

Hubungan dengan proses Poisson

- Hubungan antara distribusi eksponensial dan proses Poisson cukup sederhana.

- Misalkan distribusi Poisson dengan parameter λ, dimana λ adalah banyaknya kejadian dalam satu satuan waktu. Misalkan *X* adalah peubah acak yang menyatakan panjang selang waktu yang diperlukan agar kejadian pertama terjadi. Dengan distribusi Poisson, peluang tidak ada kejadian yang muncul sampai selang waktu *t* adalah

$$p(0;\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

- Peluang panjang selang waktu kejadian pertama terjadi sampai melewati *X* sama dengan peluang tidak ada kejadian.

  Fungsi distribusi kumulatif dari *X* adalah:

$$P(0 \leq X \leq x) = 1 - P(X \geq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

  Fungsi densitas adalah turunan fungsi diatas:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

yang merupakan fungsi padat peluang distribusi eksponesial dengan $\lambda = 1/\beta$

- Hal yang perlu diperhatikan adalah parameter λ dan β. Rataan dari distribusi eksponensial adalah β yang sama dengan 1/ λ. β adalah rataan antara dua kejadian yang berturutan.

- Teori keandalan (*reliability*) yang menyangkut kegagalan peralatan sering memenuhi proses Poisson, di sini β dapat merepresentasikan waktu rata-rata antara kegagalan.

- Banyak kerusakan peralatan memenuhi proses Poisson, dan karena itu distribusi eksponensial dapat diterapkan di situ.

- **Contoh 7**. (*aplikasi Distribusi eksponensial*) Suatu sistem mengandung sejenis komponen yang daya tahannya dalam tahun dinyatakan oleh peubah acak *T*. Peubah acak *T* berdistribusi eksponensial dengan parameter waktu rataan sampai gagal β = 5. Jika terdapat 5 buah komponen dipasang pada sistem yang berlainan, tentukan peluang sekurang-kurangnya 2 komponen masih berfungsi sampai akhir tahun ke-8.

Jawaban: Peluang komponen masih berfungsi hingga akhir tahun ke 8 adalah

$$P(T > 8) = \frac{1}{5}\int_8^\infty e^{-t/5}dt = e^{-8/5} \approx 0.2$$

Misalkan *X* adalah jumlah komponen yang masih berfungsi hingga akhir tahun ke-8, maka dengan distribusi binomial

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{5} b(x; 5,0.2)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} b(x; 5,0.2) = 1 - 0.7373 = 0.2627$$

- **Contoh 8**. (*aplikasi distribusi gamma*) Suatu panggilan telepon datang pada papan *switching* mengikuti proses Poisson, dengan rata-rata 5 sambungan datang tiap menit. Tentukan peluang hingga 1 menit berlalu baru 2 sambungan yang datang.

  Jawaban: Proses Poisson dapat diterapkan dengan menunggu 2 kejadian Poisson terjadi mempunyai distribusi Gamma dengan β = 1/5 dan α = 2. Misalkan X adalah selang waktu sebelum 2 panggilan telpon datang. Peluangnya adalah

$$P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\beta^2} x e^{-x/\beta} dx$$

$$P(X \leq 1) = 25 \int_0^1 x e^{-5x} dx$$

$$= [1 - e^{-5(1)}(1+5)] = 0.96$$

Distribusi Khi-Kuadrat

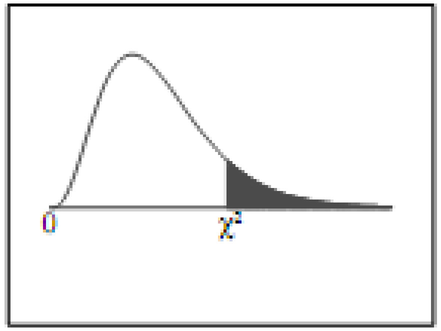
- Kasus khusus yang lain dari distribusi gamma adalah dengan mengambil $\alpha = v/2$ dan $\beta = 2$, untuk v bilangan bulat positif. Hasilnya disebut **distribusi khi-kuadrat** (*chi-squared*). Parameter v disebut derajat kebebasan.

- Peubah acak kontinu *X* mempunyai distribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan v, bila fungsi padat peluangnya diberikan oleh:

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{v/2-1} e^{-x/2}, x > 0 \\ 0, \text{ untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

- Rataan dan variansi distribusinya adalah $\mu = v$ dan $\sigma^2 = 2v$

Chi-Square Distribution Table



The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_\alpha$.

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801

16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

Distribusi Weibull

- Peubah acak kontinu *X* mempunyai distribusi **Weibull**, dengan parameter α dan β, bila fungsi padatnya berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}, x > 0 \\ 0, \text{ untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

- Rataan dan variansi dari distribusi Weibull adalah

$$\mu = \alpha^{1/\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \text{ dan}$$

$$\sigma^2 = \alpha^{-2/\beta}\left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$$

Distribusi Lognormal

- Peubah acak kontinu X mempunyai distribusi **lognormal**, jika peubah acak *Y = ln(X)* mempunyai distribusi normal dengan rataan μ dan simpangan baku σ dan fungsi padat peluangnya diberikan sebagai berikut:

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-[ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)}, x \geq 0 \\ \\ 0, \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

- Rataan dan variansi dari distribusi lognormal adalah

$$E(x) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \text{ dan } Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}.\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$